COMPARISON OF SELECTED MORTALITY MODELS

Petra Dotlačilová

Abstract

The aging of population is very often discussed topic in these days. Increasing number of living persons at higher ages (i.e. 60+) is closely related with it. Because of this development the analysis of mortality at these ages is more and more important. On the other hand small number of deaths and living persons could be very problematic for the analysis of mortality at very high ages (say over 90). And also it should be taken into consideration that data about deaths and living persons could be influenced by errors. This is one of possible reasons for the modelling of the force of mortality at ages 60+. Here could be used several approaches. One of these are analytical functions. Among the most famous ones could be included the Gompertz-Makeham function, Kannisto or Thatcher model.

The aim of this paper is the analysis of mortality in the Czech Republic and in Bulgaria. The Gompertz-Makeham function and Weibull model will be used for the modelling of the force of mortality. The benefit of this paper is quantitative comparison of results for both mentioned models with the empirical values of mortality. The other benefit is designing of evaluation criterion applicable for the determination of suitability of every single model.

Key words: force of mortality, mortality models, Czech Republic, Bulgaria

JEL Code: J10, J11, J19

Introduction

Very often discussed topic is aging of population (eg. Kannisto, 1994). Increasing number of living person at higher ages is connected with it. Because of this evolution it important the best describing of mortality at these ages (Dotlačilová, 2013). One of possible ways it is an application of analytical functions (Dotlačilová, Langhamrová, 2014 or Dotlačilová et al., 2014).

The Gompertz-Makeham function and Weibull model will be used in this paper.

1 Methodology

At first it is necessary to calculate an age-specific death rates:

$$m_x = \frac{D_x}{E_x}, \tag{1}$$

where D_x is a number of deaths at complete age x and E_x is an exposure to risk at age x.

The second step is calculation of the force of mortality (μ_x) (Fiala, 2005):

$$\lim_{h \to 0} \frac{-1}{l\left(x + \frac{h}{2}\right)} \cdot \frac{l(x+h) - l(x)}{h} = \frac{-\mathrm{d}l(x)}{l(x)\mathrm{d}x} = \mu(x), \tag{2}$$

where $l(x)$ is a number of survivors at age x in stationary population and d indicated derivative.

Between the age-specific death rates and the force of mortality is following relation (Fiala, 2005):

$$m_x \doteq \mu(x + 0{,}5). \tag{3}$$

As it was mentioned before several existing functions could be used for the modelling of the force of mortality. The Gompertz-Makeham function (GM) and Weibull model (W) will be used in this paper.

The Gompertz-Makeham function is included among functions with faster increase in the force of mortality (Ekonomov, Yarigin, 1989, Gompertz, 1825 or Lagerås, 2010). That is why it is good to use it for populon for ations with higher level of mortality (Thatcher et al., 1998 or Gavrilov, Gavrilova, 2012). But Weibull model provides values somewhere between the other models. It provides lower values of the force of mortality (in comparison with the Gompertz-Makeham function) (Boleslawski, Tabeau, 2001).

The Gompertz-Makeham function is defined by the formula:

$$\mu(x) = c + a \cdot e^{b \cdot x}, \tag{4}$$

where x is age a, b and c are unknown parameters of the Gompertz-Makeham function (Burcin et al., 2010 or Makeham, 1860).

The formula for Weibull model is:

$$m_x = b \cdot x^a, \tag{5}$$

where x is age, a and b are unknown parameters.

The aim of this paper is to propose a criterion which might be used for the evaluation of suitability of selected models. It is possible to use the sum of weighted squared deviations. It could be written like:

$$WSD = E_x \cdot (m_x - m_x^{(modelled)})^2 , \qquad (6)$$

where $m_x^{(modelled)}$ is modelled force of mortality according to every single model.

Nonlinear regression will be used for the estimating of unknown parameters for both models. For estimating them will be used the age range 60 – 85. The empirical values of age-specific death rates were used as the input data. After that the extrapolation will be provided until 110 years. STATA software (version 11) will be used for the calculations.

2 Results

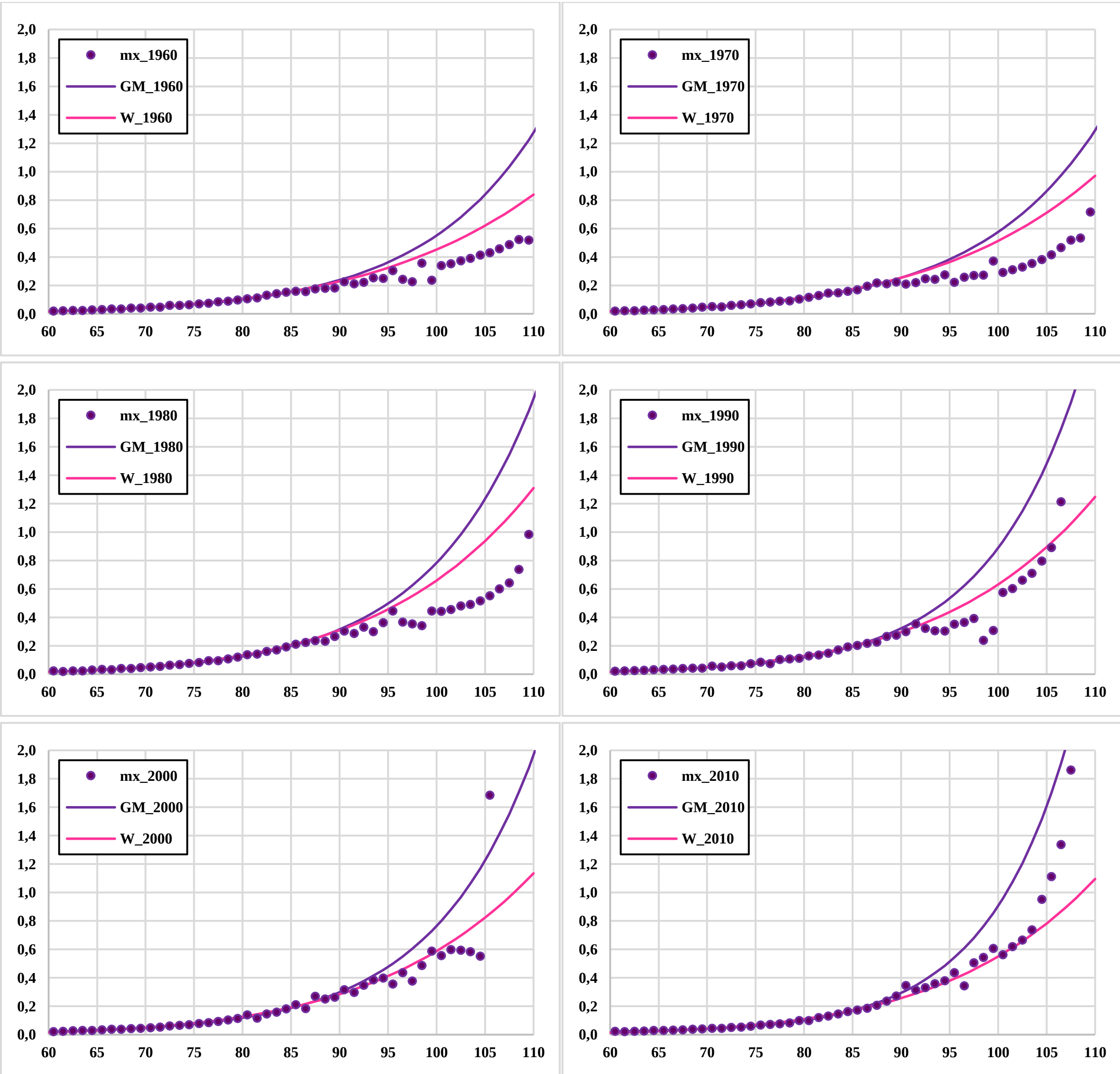
For the modelling of the force mortality will be used two models: the Gompertz-Makeham function and Weibull model. The Czech Republic (CZ) and Bulgaria (BG) (population with higher level of mortality in comparison with the Czech Republic) were chosen for the calculations. Results will be published always at the end of every single decade and they will be compared with the empirical values of mortality.

Differences between empirical values of mortality and modelled values of the force of mortality will be used for the evaluation of suitability of the Gompertz-Makeham function and Weibull model (see Attachment 1 - 4). Models will be also evaluated according to minimization criterion of weighted squared deviations.

The first group of graphs is connected with Bulgarian males. It is obvious that Weibull model is more suitable for modelling of the force of mortality (since 1960). Exception is the year 2010.

But also Weibull model very often overestimates empirical values of mortality.

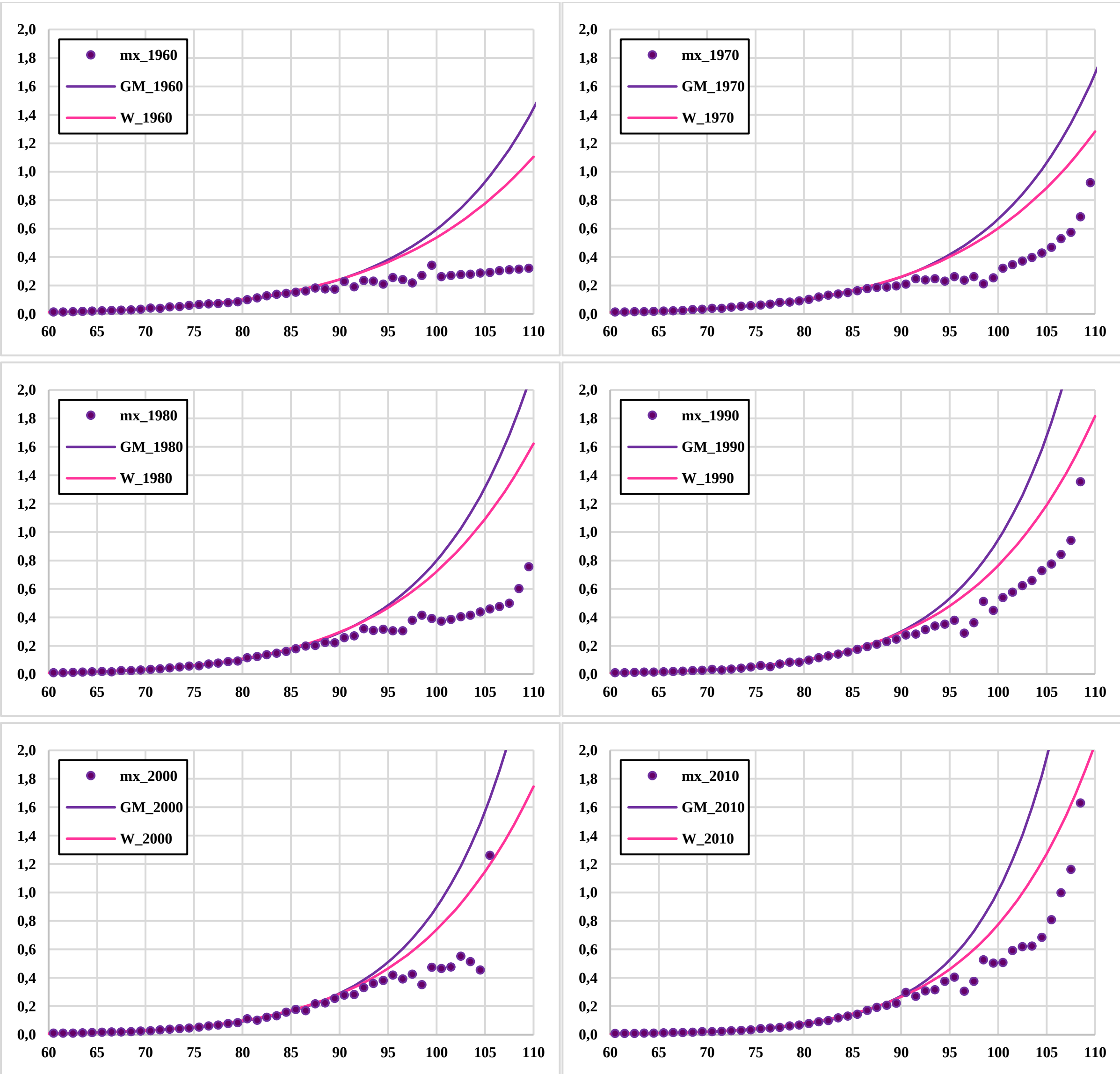
Fig. 1: Force of mortality - Bulharsko, males



Source: data the Human Mortality Database (HMD, 2014), author's calculations

The second group of graphs shows the force of mortality of Bulgarian females. Here it is also true that the Weibull model is more suitable (since 1960).

Fig. 2: Force of mortality - Bulgaria, females

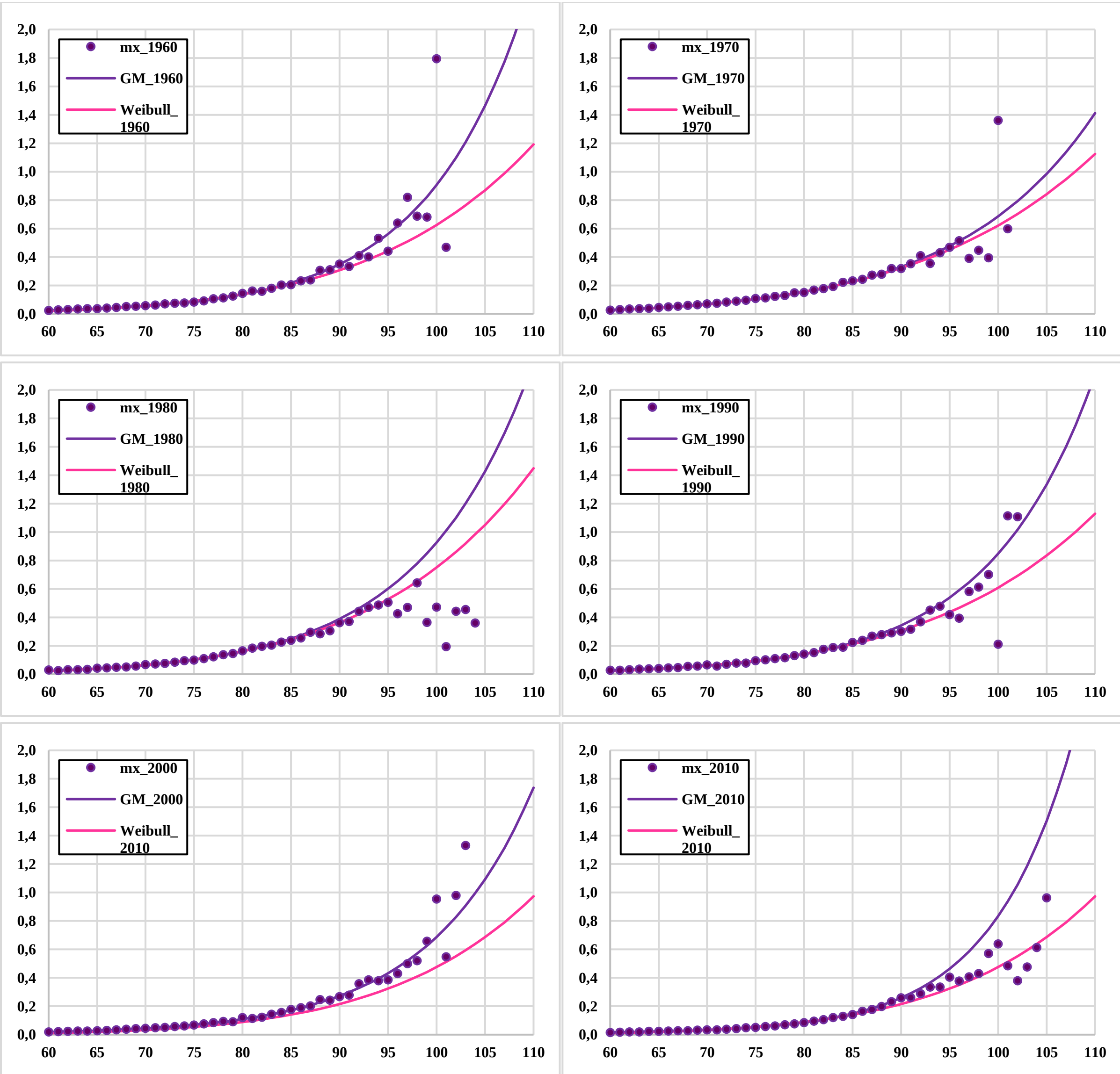


Source: data the Human Mortality Database (HMD, 2014), author's calculations

The minimization criterion WSD was also used for the evaluation of selected models. According to this criterion we could made a conclusion that the Weibull model is better for the whole analysed period (see Attachment 5).

The other two groups of graphs capture mortality of the Czech population.

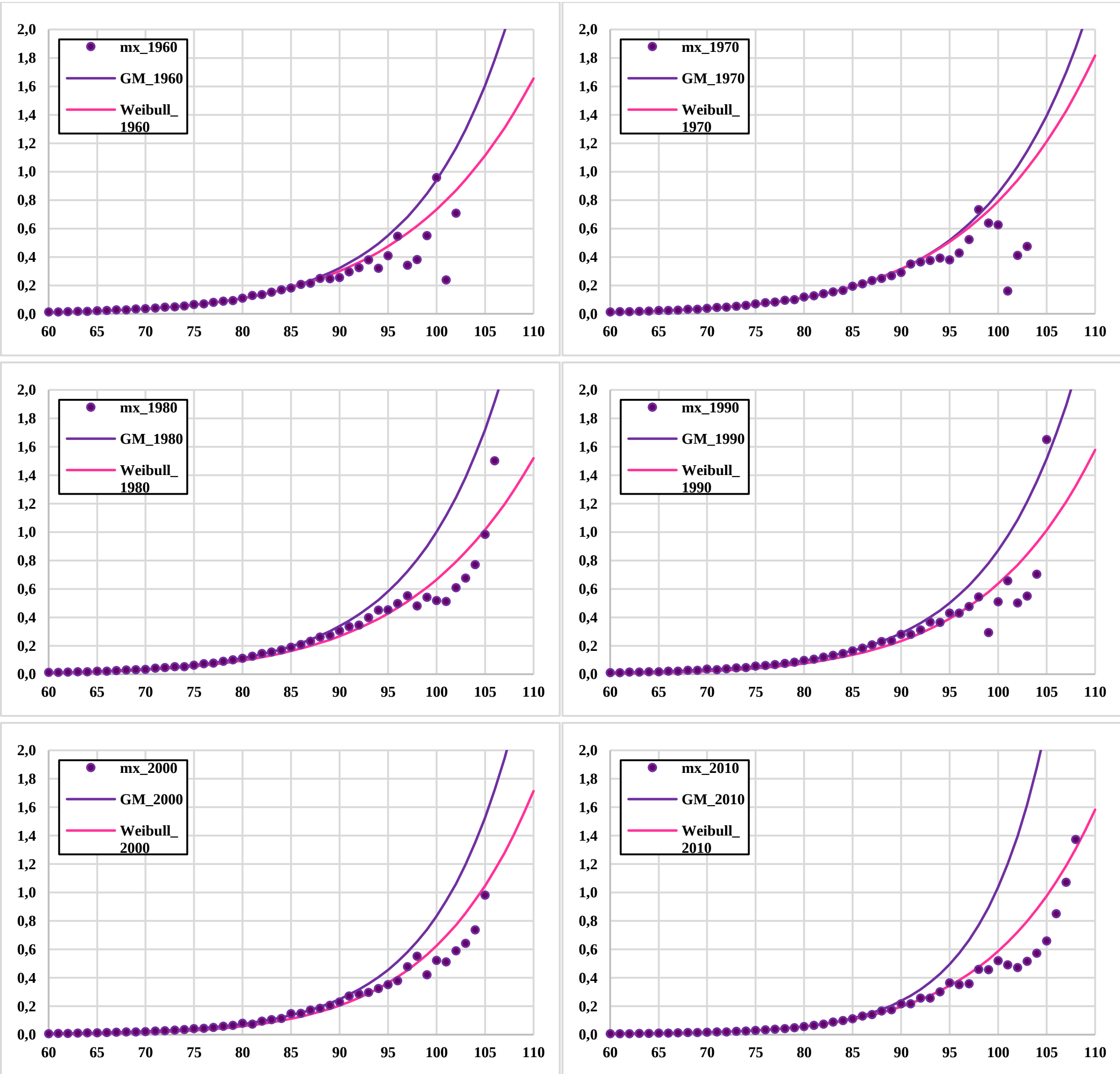
Fig. 3: Force of mortality – the Czech Republic, males



Source: data the Human Mortality Database (HMD, 2014), author's calculations

The Gompertz-Makeham function could be more suitable during almost the whole reporting period. Situation changes around the year 2000. Weibull model is more suitable in 2010.

Fig. 4: Force of mortality – the Czech Republic, females



Source: data the Human Mortality Database (HMD, 2014), author's calculations

The situation is different for Czech females. Weibull model is better for the whole analysed period.

According to sum of WSD we could say that the Gompertz-Makeham function is better to use for Czech males (almost for the whole analysed period). The situation is different from 1980 to 1990. The Weibull model is more suitable for Czech females (towards to the present) (see Attachment 5).

Conclusion

Weibull model is better to use for the modelling of the force of mortality in Bulgaria. This conclusion is also confirmed by sum of weighted squared of deviations. They are lower for

Weibull model. According to values of differences we could make a conclusion that the Gompertz-Makeham function tends to overestimate empirical mortality. Similar situation is for Weibull model but differences are lower.

The Gompertz-Makeham function is more suitable for Czech males (mainly towards to the present). On the other hand Weibull model is better for Czech females. According to values of differences it is obvious that the Gompertz-Makeham function tends to overestimate empirical mortality (mainly at the highest ages). Weibull model tends to underestimate empirical mortality and values of differences are lower.

Acknowledgment

This paper was supported by project VŠE IGA F4/35/2017 "Demographic models in R software".

References

BOLESLAWSKI, L., TABEAU, E. Comparing Theoretical Age Patterns of Mortality Beyond the Age of 80. *In: Tabeau, E., Van Den Berg Jeths, A. and Heathcote, CH. (Eds.). Forecasting Mortality in Developed Countries: Insights from a Statistical, Demographic and Epidemiological Perspective*, 2001, pp. 127 – 155.

BURCIN, B., TESÁRKOVÁ, K., ŠÍDLO, L. Nejpoužívanější metody vyrovnávání a extrapolace křivky úmrtnosti a jejich aplikace na českou populaci. *Demografie 52*, 2010, pp. 77 – 89.

DOTLAČILOVÁ, P. (2013). Changes in the Development of the Normal Length of Life and Life Expectancy in the Czech Population. *International Days of Statistics and Economics* (pp. 357-364). [online] Prague, 19. 09. 2013 – 21. 09. 2013. Slaný: Melandrium. ISBN 978-80-86175-87-4. URL: http://msed.vse.cz/files/2013/144-Dotlacilova-Petra-paper.pdf.

DOTLAČILOVÁ, P., LANGHAMROVÁ, JI. The Influence of Mortality Models for the Expected Future Life-time of Older People. In: *AMSE* [CD ROM]. Jerzmanovice, 27.08.2014 – 31.08.2014. Wroclaw: Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu, 2014, s. 65–74. ISBN 978-83-7695-421-9.

DOTLAČILOVÁ, P., ŠIMPACH, O., LANGHAMROVÁ, JI. The Use of Polynomial Functions for Modelling of Mortality at the Advanced Ages. In: *Mathematical Methods in*

Economics (MME2014). Olomouc, 10.09.2014 – 12.09.2014. Olomouc: Palacký University in Olomouc, 2014, s. 174–179. ISBN 978-80-244-4208-2. CD ISBN 978-80-244-4209-9.

EKONOMOV, AL., YARIGIN, VN. The age dynamics of mortality and the Gompertz-Makeham law, *Zhurnal Obshchei Biologii*, Vol. 50, Issue 2, MAR-APR 1989, pp. 236–243.

FIALA, T. (2005). *Výpočty aktuárské demografie v tabulkovém procesoru*. Praha: Vysoká škola ekonomická v Praze. ISBN 80-2450821-4.

GAVRILOV, L.A., GAVRILOVA, N.S. (2012). Mortality measurement at advanced ages: a study of social security admin-istration death master file. *North American actuarial journal*, vol. 15, no. 3, pp. 432 – 447.

GOMPERTZ, B. On the Nature of the Function Expressive of the Law of Human Mortality, and on a New Mode of Determining the Value of Life Contingencies. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 115 (1825), pp. 513–585.

HUMAN MORTALITY DATABASE 2014. [cit.18.3.2014]. Available from WWW: www.mortality.org

KANNISTO, V., LAURITSEN, J., THATCHER, A., R., VAUPEL, J., W. (1994). Reductions in mortality at advanced ages - several decades of evidence from 27 countries. *Population and development review*, vol. 20, no. 4, pp. 793-810.

LAGERÅS, A.N. Commutation functions under Gompertz–Makeham mortality, *Scandinavian Actuarial Journal*, Vol. 2010, Issue 2, pp. 161–164.

MAKEHAM, W.M. On the Law of Mortality and the Construction of Annuity Tables. *The Assurance Magazine*, and Journal of the Institute of Actuaries 8 (1860), pp. 301–310.

THATCHER, R.A., KANISTÖ, V. AND VAUPEL, J.W. *The Force of Mortality at Ages 80 to 120*. Odense University Press, 1998.

Attachment 1: Values of differences (Gompertz-Makeham function and Weibull model) – Bulgaria, males

age	GM_1960	GM_1970	GM_1980	GM_1990	GM_2000	GM_2010	W_1960	W_1970	W_1980	W_1990	W_2000	W_2010
60	-0,0006	0,0006	0,0038	-0,0014	-0,0010	0,0001	0,0010	0,0009	0,0056	0,0044	0,0041	0,0088
61	-0,0006	-0,0002	-0,0013	-0,0010	-0,0001	-0,0016	0,0009	0,0002	0,0005	0,0043	0,0047	0,0065
62	0,0005	-0,0006	0,0002	-0,0001	0,0007	-0,0009	0,0018	-0,0001	0,0019	0,0048	0,0051	0,0065
63	-0,0009	-0,0003	-0,0019	-0,0005	0,0009	-0,0013	0,0003	0,0002	-0,0002	0,0039	0,0050	0,0055
64	-0,0002	-0,0011	-0,0001	0,0004	-0,0003	0,0011	0,0009	-0,0006	0,0015	0,0043	0,0033	0,0071
65	-0,0003	-0,0008	0,0019	0,0006	0,0012	-0,0010	0,0007	-0,0003	0,0033	0,0039	0,0044	0,0042
66	0,0007	0,0002	-0,0039	0,0005	0,0013	0,0007	0,0015	0,0007	-0,0026	0,0032	0,0040	0,0050
67	-0,0012	-0,0003	0,0024	0,0006	-0,0017	0,0005	-0,0007	0,0001	0,0036	0,0028	0,0006	0,0040
68	0,0019	0,0001	-0,0016	-0,0001	-0,0001	0,0006	0,0022	0,0005	-0,0007	0,0014	0,0017	0,0032
69	-0,0014	0,0015	-0,0001	-0,0027	-0,0014	0,0007	-0,0013	0,0018	0,0006	-0,0019	-0,0002	0,0024
70	0,0017	0,0026	-0,0013	0,0061	-0,0019	0,0019	0,0016	0,0028	-0,0009	0,0062	-0,0013	0,0026
71	-0,0028	-0,0038	-0,0018	-0,0047	-0,0017	-0,0007	-0,0031	-0,0037	-0,0016	-0,0052	-0,0016	-0,0008
72	0,0043	0,0007	0,0001	-0,0003	0,0006	0,0006	0,0038	0,0006	-0,0001	-0,0014	0,0001	-0,0004
73	-0,0009	-0,0002	-0,0006	-0,0068	0,0006	-0,0015	-0,0016	-0,0005	-0,0009	-0,0085	-0,0004	-0,0033
74	-0,0004	-0,0001	0,0010	0,0015	-0,0016	-0,0006	-0,0013	-0,0005	0,0004	-0,0007	-0,0030	-0,0033
75	0,0004	0,0015	-0,0010	0,0052	-0,0010	0,0016	-0,0005	0,0010	-0,0019	0,0025	-0,0029	-0,0017
76	-0,0030	-0,0004	0,0036	-0,0134	-0,0022	0,0001	-0,0040	-0,0010	0,0026	-0,0164	-0,0044	-0,0037
77	0,0021	-0,0004	-0,0044	0,0084	-0,0013	-0,0031	0,0012	-0,0011	-0,0056	0,0053	-0,0037	-0,0071
78	-0,0019	-0,0063	-0,0024	0,0024	0,0007	-0,0039	-0,0027	-0,0070	-0,0037	-0,0008	-0,0018	-0,0080
79	-0,0018	-0,0043	-0,0007	-0,0034	0,0012	0,0029	-0,0024	-0,0050	-0,0018	-0,0063	-0,0012	-0,0009
80	-0,0019	-0,0006	0,0050	0,0023	0,0164	-0,0067	-0,0022	-0,0012	0,0041	0,0000	0,0144	-0,0099
81	-0,0046	0,0018	-0,0035	-0,0041	-0,0196	0,0025	-0,0044	0,0014	-0,0041	-0,0054	-0,0210	0,0005
82	0,0040	0,0089	0,0003	-0,0061	-0,0028	-0,0003	0,0050	0,0089	0,0004	-0,0060	-0,0033	-0,0006
83	0,0037	-0,0021	-0,0041	0,0013	-0,0051	0,0007	0,0057	-0,0017	-0,0031	0,0034	-0,0042	0,0029
84	0,0022	-0,0046	-0,0001	0,0048	0,0026	0,0014	0,0054	-0,0035	0,0021	0,0095	0,0053	0,0069
85	-0,0062	-0,0076	0,0009	-0,0033	0,0149	-0,0060	-0,0014	-0,0057	0,0047	0,0048	0,0200	0,0038
86	-0,0208	0,0026	-0,0059	-0,0110	-0,0322	-0,0135	-0,0141	0,0057	0,0001	0,0014	-0,0241	0,0017
87	-0,0179	0,0099	-0,0158	-0,0264	0,0343	-0,0162	-0,0087	0,0145	-0,0072	-0,0087	0,0462	0,0058
88	-0,0315	-0,0151	-0,0436	-0,0118	-0,0080	-0,0123	-0,0195	-0,0087	-0,0318	0,0124	0,0085	0,0182
89	-0,0468	-0,0223	-0,0373	-0,0342	-0,0209	-0,0057	-0,0313	-0,0138	-0,0214	-0,0020	0,0013	0,0352
90	-0,0224	-0,0568	-0,0268	-0,0395	0,0031	0,0361	-0,0028	-0,0455	-0,0060	0,0022	0,0321	0,0894
91	-0,0599	-0,0693	-0,0749	-0,0213	-0,0471	-0,0332	-0,0355	-0,0548	-0,0481	0,0320	-0,0098	0,0353
92	-0,0725	-0,0673	-0,0650	-0,0930	-0,0296	-0,0575	-0,0424	-0,0489	-0,0311	-0,0260	0,0173	0,0290
93	-0,0675	-0,0968	-0,1351	-0,1541	-0,0288	-0,0763	-0,0306	-0,0737	-0,0926	-0,0710	0,0297	0,0318
94	-0,1001	-0,0943	-0,1132	-0,2058	-0,0574	-0,1052	-0,0555	-0,0657	-0,0607	-0,1036	0,0146	0,0283
95	-0,0759	-0,1796	-0,0772	-0,2104	-0,1440	-0,1079	-0,0223	-0,1447	-0,0129	-0,0859	-0,0561	0,0556
96	-0,1694	-0,1769	-0,2040	-0,2589	-0,1125	-0,2641	-0,1055	-0,1344	-0,1258	-0,1083	-0,0063	-0,0653
97	-0,2221	-0,2019	-0,2701	-0,2981	-0,2265	-0,1763	-0,1463	-0,1507	-0,1757	-0,1173	-0,0989	0,0637
98	-0,1320	-0,2383	-0,3424	-0,5252	-0,1777	-0,2207	-0,0425	-0,1770	-0,2293	-0,3093	-0,0254	0,0674
99	-0,2936	-0,1838	-0,3042	-0,5366	-0,1405	-0,2494	-0,1885	-0,1109	-0,1693	-0,2800	0,0404	0,0946
100	-0,2365	-0,3098	-0,3773	-0,3607	-0,2456	-0,3973	-0,1135	-0,2235	-0,2174	-0,0573	-0,0320	0,0116

Source: data the Human Mortality Database, author's calculations

Attachment 2: Values of differences (Gompertz-Makeham function and Weibull model) – Bulgaria, females

age	GM_1960	GM_1970	GM_1980	GM_1990	GM_2000	GM_2010	W_1960	W_1970	W_1980	W_1990	W_2000	W_2010
60	0,0021	0,0020	0,0033	0,0004	0,0024	0,0008	0,0008	0,0003	0,0011	0,0017	0,0030	0,0033
61	0,0001	0,0010	0,0010	0,0011	0,0020	0,0015	-0,0010	-0,0004	-0,0010	0,0024	0,0027	0,0040
62	-0,0005	0,0011	0,0009	0,0006	0,0008	0,0008	-0,0014	-0,0001	-0,0008	0,0019	0,0016	0,0034
63	0,0004	-0,0008	0,0012	0,0012	0,0013	0,0003	-0,0003	-0,0018	-0,0002	0,0025	0,0021	0,0028
64	0,0001	-0,0005	0,0013	0,0002	0,0006	0,0008	-0,0005	-0,0013	0,0001	0,0015	0,0014	0,0033
65	-0,0002	-0,0008	0,0006	-0,0001	0,0001	0,0002	-0,0006	-0,0015	-0,0004	0,0012	0,0010	0,0026
66	-0,0017	-0,0014	-0,0033	-0,0009	0,0008	0,0011	-0,0020	-0,0019	-0,0041	0,0004	0,0016	0,0034
67	-0,0016	-0,0020	0,0009	-0,0013	-0,0006	-0,0002	-0,0018	-0,0023	0,0004	-0,0001	0,0002	0,0019
68	-0,0017	0,0007	-0,0012	0,0009	-0,0024	-0,0012	-0,0018	0,0005	-0,0016	0,0019	-0,0017	0,0007
69	-0,0027	-0,0003	-0,0008	0,0001	-0,0003	0,0012	-0,0027	-0,0004	-0,0010	0,0010	0,0004	0,0030
70	0,0020	0,0005	-0,0008	0,0025	-0,0023	-0,0017	0,0020	0,0005	-0,0009	0,0032	-0,0017	-0,0002
71	-0,0027	-0,0023	-0,0012	-0,0051	-0,0001	-0,0020	-0,0026	-0,0022	-0,0013	-0,0046	0,0003	-0,0008
72	0,0022	0,0011	-0,0002	-0,0028	-0,0007	-0,0007	0,0023	0,0012	-0,0001	-0,0025	-0,0005	0,0003
73	-0,0006	0,0011	-0,0009	-0,0034	-0,0001	-0,0015	-0,0005	0,0012	-0,0008	-0,0034	0,0000	-0,0009
74	0,0030	0,0004	0,0001	0,0010	-0,0025	-0,0018	0,0031	0,0004	0,0002	0,0009	-0,0025	-0,0015
75	0,0026	-0,0021	-0,0041	0,0042	-0,0017	-0,0003	0,0027	-0,0020	-0,0040	0,0038	-0,0019	-0,0003
76	0,0016	-0,0028	0,0016	-0,0099	-0,0006	-0,0011	0,0016	-0,0027	0,0017	-0,0105	-0,0010	-0,0015
77	-0,0029	0,0040	-0,0017	0,0015	-0,0013	-0,0020	-0,0029	0,0041	-0,0016	0,0007	-0,0018	-0,0026
78	-0,0046	-0,0034	-0,0005	0,0039	-0,0001	0,0011	-0,0046	-0,0033	-0,0004	0,0030	-0,0007	0,0002
79	-0,0063	-0,0034	-0,0054	-0,0048	-0,0035	-0,0015	-0,0062	-0,0033	-0,0053	-0,0057	-0,0041	-0,0026
80	-0,0005	-0,0025	0,0062	-0,0009	0,0141	0,0000	-0,0003	-0,0022	0,0065	-0,0017	0,0136	-0,0011
81	0,0013	0,0036	0,0025	0,0036	-0,0094	0,0015	0,0017	0,0041	0,0029	0,0031	-0,0096	0,0005
82	0,0043	0,0048	0,0022	0,0011	-0,0005	-0,0024	0,0050	0,0055	0,0029	0,0011	-0,0002	-0,0030
83	0,0046	-0,0006	-0,0018	-0,0014	-0,0061	0,0018	0,0056	0,0005	-0,0007	-0,0006	-0,0051	0,0018
84	-0,0027	-0,0040	-0,0063	-0,0042	0,0023	-0,0030	-0,0011	-0,0023	-0,0047	-0,0021	0,0044	-0,0018
85	-0,0086	-0,0061	-0,0068	-0,0055	0,0039	-0,0070	-0,0063	-0,0037	-0,0043	-0,0018	0,0075	-0,0042
86	-0,0147	-0,0096	-0,0060	-0,0064	-0,0264	-0,0025	-0,0115	-0,0062	-0,0025	-0,0005	-0,0209	0,0027
87	-0,0110	-0,0186	-0,0237	-0,0157	-0,0020	-0,0048	-0,0066	-0,0139	-0,0188	-0,0068	0,0062	0,0035
88	-0,0354	-0,0371	-0,0291	-0,0236	-0,0211	-0,0165	-0,0294	-0,0308	-0,0224	-0,0109	-0,0095	-0,0040
89	-0,0589	-0,0512	-0,0564	-0,0381	-0,0192	-0,0334	-0,0510	-0,0427	-0,0473	-0,0205	-0,0032	-0,0153
90	-0,0267	-0,0636	-0,0521	-0,0429	-0,0289	0,0057	-0,0165	-0,0525	-0,0400	-0,0191	-0,0075	0,0309
91	-0,0887	-0,0533	-0,0716	-0,0744	-0,0621	-0,0605	-0,0755	-0,0389	-0,0557	-0,0429	-0,0339	-0,0262
92	-0,0694	-0,0917	-0,0570	-0,0876	-0,0541	-0,0706	-0,0527	-0,0734	-0,0364	-0,0466	-0,0175	-0,0249
93	-0,1033	-0,1168	-0,1099	-0,1100	-0,0713	-0,1151	-0,0822	-0,0936	-0,0835	-0,0574	-0,0244	-0,0551
94	-0,1541	-0,1677	-0,1446	-0,1522	-0,0999	-0,1145	-0,1279	-0,1386	-0,1112	-0,0854	-0,0406	-0,0368
95	-0,1420	-0,1761	-0,2051	-0,1851	-0,1201	-0,1548	-0,1097	-0,1401	-0,1633	-0,1012	-0,0455	-0,0553
96	-0,1941	-0,2453	-0,2591	-0,3444	-0,2114	-0,3312	-0,1545	-0,2008	-0,2069	-0,2398	-0,1187	-0,2049
97	-0,2587	-0,2671	-0,2447	-0,3470	-0,2513	-0,3522	-0,2105	-0,2127	-0,1802	-0,2176	-0,1366	-0,1933
98	-0,2503	-0,3691	-0,2724	-0,2840	-0,4054	-0,3033	-0,1920	-0,3030	-0,1932	-0,1252	-0,2647	-0,1049
99	-0,2273	-0,3843	-0,3693	-0,4430	-0,3726	-0,4410	-0,1572	-0,3043	-0,2727	-0,2491	-0,2010	-0,1949
100	-0,3600	-0,3784	-0,4664	-0,4618	-0,4819	-0,5709	-0,2761	-0,2821	-0,3492	-0,2263	-0,2736	-0,2675

Source: data the Human Mortality Database, author's calculations

Attachment 3: Values of differences (Gompertz-Makeham function and Weibull model) – Czech Republic, males

age	GM_1960	GM_1970	GM_1980	GM_1990	GM_2000	GM_2010	W_1960	W_1970	W_1980	W_1990	W_2000	W_2010
60	-0,0016	-0,0002	0,0063	-0,0010	0,0004	-0,0026	0,0034	-0,0006	0,0076	0,0044	0,0042	0,0042
61	-0,0008	-0,0009	-0,0015	-0,0020	0,0000	-0,0013	0,0038	-0,0011	-0,0001	0,0030	0,0036	0,0050
62	-0,0002	0,0001	0,0019	-0,0014	0,0003	0,0007	0,0040	0,0001	0,0032	0,0031	0,0036	0,0065
63	0,0009	-0,0002	-0,0007	0,0002	0,0008	-0,0004	0,0046	0,0000	0,0006	0,0042	0,0038	0,0049
64	0,0006	-0,0024	-0,0026	0,0007	-0,0010	0,0014	0,0038	-0,0021	-0,0013	0,0042	0,0018	0,0061
65	-0,0014	-0,0006	0,0012	-0,0002	-0,0010	0,0004	0,0012	-0,0002	0,0023	0,0027	0,0015	0,0045
66	-0,0005	-0,0002	-0,0009	0,0013	-0,0007	0,0013	0,0015	0,0002	0,0000	0,0036	0,0014	0,0047
67	0,0006	0,0009	-0,0005	-0,0003	0,0001	0,0017	0,0021	0,0013	0,0004	0,0014	0,0019	0,0043
68	0,0033	0,0007	-0,0026	0,0023	0,0005	-0,0013	0,0042	0,0012	-0,0019	0,0034	0,0019	0,0007
69	0,0007	-0,0003	-0,0015	0,0012	0,0014	0,0004	0,0010	0,0002	-0,0011	0,0016	0,0024	0,0016
70	-0,0002	0,0014	0,0025	0,0055	-0,0006	0,0016	-0,0006	0,0018	0,0027	0,0053	0,0000	0,0020
71	-0,0003	-0,0016	-0,0002	-0,0092	0,0002	-0,0032	-0,0012	-0,0013	-0,0002	-0,0100	0,0003	-0,0035
72	0,0024	0,0008	-0,0026	-0,0020	-0,0020	-0,0006	0,0009	0,0010	-0,0029	-0,0033	-0,0022	-0,0016
73	0,0000	0,0002	-0,0005	0,0001	-0,0009	-0,0015	-0,0020	0,0003	-0,0010	-0,0018	-0,0016	-0,0032
74	-0,0041	-0,0018	0,0008	-0,0062	-0,0021	0,0008	-0,0066	-0,0019	0,0001	-0,0086	-0,0032	-0,0015
75	-0,0058	0,0040	-0,0034	0,0028	-0,0021	-0,0014	-0,0085	0,0037	-0,0042	0,0001	-0,0035	-0,0043
76	-0,0059	-0,0022	-0,0033	0,0014	0,0012	0,0004	-0,0089	-0,0026	-0,0043	-0,0015	-0,0005	-0,0030
77	0,0014	-0,0009	-0,0005	-0,0008	0,0010	-0,0012	-0,0015	-0,0015	-0,0016	-0,0038	-0,0009	-0,0048
78	-0,0030	-0,0033	0,0016	-0,0035	0,0025	-0,0007	-0,0058	-0,0040	0,0006	-0,0064	0,0006	-0,0044
79	-0,0003	0,0031	-0,0029	0,0001	-0,0077	-0,0011	-0,0027	0,0023	-0,0036	-0,0025	-0,0096	-0,0046
80	0,0063	-0,0057	0,0027	-0,0010	0,0116	-0,0010	0,0047	-0,0065	0,0024	-0,0030	0,0100	-0,0040
81	0,0085	-0,0017	0,0066	-0,0034	-0,0055	-0,0004	0,0080	-0,0025	0,0069	-0,0044	-0,0067	-0,0025
82	-0,0067	-0,0029	0,0040	0,0052	-0,0076	-0,0007	-0,0056	-0,0036	0,0052	0,0055	-0,0081	-0,0014
83	-0,0029	-0,0040	-0,0061	0,0020	-0,0009	0,0025	0,0003	-0,0044	-0,0038	0,0041	-0,0004	0,0037
84	0,0035	0,0097	-0,0043	-0,0114	-0,0011	-0,0029	0,0094	0,0096	-0,0005	-0,0069	0,0007	0,0011
85	-0,0135	0,0045	-0,0126	0,0036	0,0058	-0,0057	-0,0041	0,0049	-0,0068	0,0111	0,0094	0,0018
86	-0,0090	-0,0033	-0,0191	-0,0031	0,0010	-0,0003	0,0046	-0,0022	-0,0107	0,0081	0,0069	0,0117
87	-0,0261	0,0071	-0,0055	0,0046	-0,0050	-0,0069	-0,0072	0,0092	0,0060	0,0204	0,0038	0,0109
88	0,0154	-0,0061	-0,0430	-0,0090	0,0189	-0,0086	0,0407	-0,0027	-0,0277	0,0124	0,0312	0,0164
89	-0,0083	0,0115	-0,0512	-0,0231	-0,0055	0,0001	0,0247	0,0165	-0,0313	0,0050	0,0112	0,0338
90	0,0000	-0,0124	-0,0275	-0,0426	-0,0045	-0,0020	0,0423	-0,0054	-0,0019	-0,0065	0,0175	0,0425
91	-0,0517	-0,0032	-0,0537	-0,0610	-0,0209	-0,0311	0,0015	0,0062	-0,0214	-0,0154	0,0074	0,0264
92	-0,0136	0,0261	-0,0204	-0,0426	0,0297	-0,0394	0,0525	0,0385	0,0199	0,0141	0,0655	0,0338
93	-0,0635	-0,0578	-0,0363	-0,0009	0,0270	-0,0328	0,0177	-0,0420	0,0134	0,0689	0,0718	0,0590
94	0,0197	-0,0145	-0,0649	-0,0143	-0,0147	-0,0784	0,1186	0,0055	-0,0042	0,0706	0,0406	0,0356
95	-0,1228	-0,0108	-0,0964	-0,1197	-0,0479	-0,0597	-0,0033	0,0141	-0,0228	-0,0171	0,0197	0,0806
96	0,0195	0,0009	-0,2297	-0,1964	-0,0439	-0,1443	0,1628	0,0317	-0,1411	-0,0735	0,0381	0,0269
97	0,1397	-0,1618	-0,2452	-0,0653	-0,0209	-0,1801	0,3105	-0,1243	-0,1392	0,0810	0,0777	0,0274
98	-0,0621	-0,1476	-0,1371	-0,0955	-0,0511	-0,2297	0,1404	-0,1023	-0,0110	0,0776	0,0668	0,0204
99	-0,1434	-0,2450	-0,4866	-0,0742	0,0306	-0,1700	0,0955	-0,1906	-0,3374	0,1297	0,1709	0,1299
100	0,8867	0,6729	-0,4545	-0,6371	0,2662	-0,1945	1,1672	0,7377	-0,2788	-0,3981	0,4320	0,1632

Source: data the Human Mortality Database, author's calculations

Attachment 4: Values of differences (Gompertz-Makeham function and Weibull model) – Czech Republic, females

age	GM_1960	GM_1970	GM_1980	GM_1990	GM_2000	GM_2010	W_1960	W_1970	W_1980	W_1990	W_2000	W_2010
60	0,0006	0,0023	0,0031	-0,0003	0,0003	-0,0010	0,0017	0,0029	0,0050	0,0052	0,0047	0,0036
61	0,0006	0,0022	0,0009	-0,0009	0,0002	-0,0005	0,0017	0,0032	0,0030	0,0050	0,0050	0,0039
62	0,0005	0,0004	0,0017	0,0003	-0,0001	-0,0009	0,0016	0,0017	0,0041	0,0065	0,0050	0,0033
63	0,0002	0,0010	0,0009	-0,0003	-0,0003	-0,0008	0,0014	0,0026	0,0036	0,0064	0,0051	0,0033
64	-0,0018	0,0002	-0,0014	0,0000	0,0004	-0,0005	-0,0006	0,0020	0,0017	0,0071	0,0062	0,0034
65	0,0001	0,0006	0,0004	-0,0008	-0,0002	0,0000	0,0012	0,0027	0,0039	0,0067	0,0060	0,0037
66	-0,0005	-0,0016	-0,0005	0,0008	0,0002	0,0001	0,0006	0,0007	0,0033	0,0088	0,0067	0,0036
67	0,0007	-0,0020	-0,0009	-0,0010	0,0000	0,0001	0,0016	0,0005	0,0033	0,0075	0,0070	0,0033
68	-0,0012	0,0001	0,0000	0,0008	0,0003	0,0009	-0,0004	0,0027	0,0046	0,0098	0,0078	0,0038
69	0,0000	-0,0023	-0,0009	-0,0003	-0,0008	0,0006	0,0007	0,0005	0,0042	0,0093	0,0071	0,0031
70	-0,0006	-0,0011	-0,0019	0,0038	-0,0008	0,0013	-0,0001	0,0017	0,0036	0,0139	0,0076	0,0035
71	-0,0008	-0,0002	0,0004	-0,0035	-0,0012	-0,0001	-0,0004	0,0026	0,0065	0,0072	0,0078	0,0017
72	0,0011	-0,0016	-0,0004	-0,0021	-0,0006	-0,0006	0,0012	0,0011	0,0062	0,0092	0,0089	0,0008
73	-0,0025	-0,0017	0,0019	-0,0002	-0,0018	0,0007	-0,0025	0,0010	0,0092	0,0118	0,0083	0,0017
74	-0,0020	-0,0023	-0,0045	-0,0027	0,0001	-0,0011	-0,0023	0,0002	0,0036	0,0101	0,0108	-0,0005
75	0,0018	0,0016	-0,0003	0,0023	0,0020	0,0004	0,0013	0,0039	0,0086	0,0159	0,0134	0,0006
76	-0,0018	0,0015	0,0006	-0,0009	-0,0014	-0,0007	-0,0026	0,0035	0,0105	0,0136	0,0107	-0,0009
77	0,0006	-0,0011	-0,0033	-0,0015	-0,0015	-0,0008	-0,0003	0,0006	0,0078	0,0139	0,0114	-0,0013
78	0,0004	0,0015	0,0004	-0,0008	0,0010	-0,0010	-0,0005	0,0028	0,0129	0,0157	0,0147	-0,0016
79	-0,0062	-0,0040	-0,0007	-0,0012	-0,0018	-0,0006	-0,0071	-0,0032	0,0135	0,0165	0,0130	-0,0013
80	0,0002	0,0040	-0,0008	0,0002	0,0063	-0,0011	-0,0005	0,0044	0,0152	0,0193	0,0222	-0,0015
81	0,0050	-0,0014	-0,0008	-0,0012	-0,0096	-0,0008	0,0046	-0,0015	0,0175	0,0195	0,0075	-0,0008
82	-0,0014	0,0003	0,0051	0,0006	0,0004	-0,0025	-0,0013	-0,0004	0,0261	0,0231	0,0189	-0,0017
83	-0,0011	-0,0021	-0,0018	-0,0004	-0,0020	0,0012	-0,0002	-0,0034	0,0224	0,0242	0,0182	0,0034
84	-0,0013	-0,0074	-0,0048	-0,0030	-0,0066	-0,0008	0,0008	-0,0091	0,0232	0,0241	0,0156	0,0033
85	-0,0081	0,0032	-0,0056	-0,0024	0,0116	-0,0042	-0,0044	0,0011	0,0270	0,0276	0,0360	0,0027
86	-0,0033	0,0001	-0,0097	-0,0016	-0,0044	-0,0017	0,0026	-0,0023	0,0281	0,0318	0,0228	0,0089
87	-0,0198	0,0001	-0,0132	-0,0011	-0,0016	-0,0115	-0,0111	-0,0025	0,0309	0,0364	0,0288	0,0041
88	-0,0127	-0,0105	-0,0112	-0,0013	-0,0103	-0,0111	-0,0004	-0,0130	0,0404	0,0409	0,0239	0,0110
89	-0,0427	-0,0181	-0,0289	-0,0223	-0,0144	-0,0304	-0,0258	-0,0202	0,0314	0,0255	0,0244	0,0001
90	-0,0670	-0,0242	-0,0331	-0,0085	-0,0201	-0,0198	-0,0445	-0,0256	0,0375	0,0459	0,0241	0,0214
91	-0,0652	0,0011	-0,0431	-0,0412	-0,0098	-0,0583	-0,0357	0,0009	0,0395	0,0210	0,0410	-0,0036
92	-0,0758	-0,0213	-0,0750	-0,0487	-0,0301	-0,0617	-0,0377	-0,0197	0,0219	0,0227	0,0285	0,0098
93	-0,0662	-0,0496	-0,0709	-0,0365	-0,0604	-0,1108	-0,0177	-0,0455	0,0425	0,0457	0,0076	-0,0182
94	-0,1745	-0,0779	-0,0729	-0,0852	-0,0794	-0,1252	-0,1134	-0,0704	0,0598	0,0098	-0,0003	-0,0067
95	-0,1434	-0,1390	-0,1296	-0,0712	-0,1032	-0,1306	-0,0672	-0,1269	0,0258	0,0389	-0,0106	0,0199
96	-0,0690	-0,1464	-0,1522	-0,1304	-0,1355	-0,2211	0,0252	-0,1286	0,0294	-0,0027	-0,0270	-0,0314
97	-0,3427	-0,1110	-0,1733	-0,1485	-0,1026	-0,3073	-0,2271	-0,0859	0,0388	-0,0001	0,0250	-0,0700
98	-0,3794	0,0350	-0,3258	-0,1551	-0,1034	-0,3119	-0,2384	0,0693	-0,0783	0,0175	0,0468	-0,0166
99	-0,2972	-0,1339	-0,3584	-0,4866	-0,3169	-0,4380	-0,1263	-0,0884	-0,0699	-0,2856	-0,1399	-0,0725
100	0,0168	-0,2254	-0,4848	-0,3614	-0,3112	-0,5162	0,2230	-0,1661	-0,1489	-0,1272	-0,1022	-0,0660

Source: data the Human Mortality Database, author's calculations

Attachment 5: Weighted squared deviation (Gompertz-Makeham function and Weibull model)

Sum of WSD	GM_1960	GM_1970	GM_1980	GM_1990	GM_2000	GM_2010	W_1960	W_1970	W_1980	W_1990	W_2000	W_2010
BG_males	44,89	63,30	87,14	115,19	42,06	69,97	16,59	36,62	36,32	41,58	33,83	51,33
BG_females	85,03	153,88	192,49	183,83	132,47	285,84	54,00	99,85	113,01	66,50	45,61	77,23
CZ_males	12,04	7,90	31,58	22,43	10,31	34,44	23,23	7,59	14,90	20,35	26,54	39,99
CZ_females	49,45	24,23	74,03	64,69	88,26	421,60	19,70	23,57	122,05	219,69	166,02	27,24

Source: data the Human Mortality Database, author's calculations

Contact

Petra Dotlačilová
University of Economics in Prague (Faculty of Informatics and Statistics, Dep. of Mathematics)
W. Churchill Sq. 4, Prague 3, 130 67
petra.dotlacilova@vse.cz